Шабалин
Евгений
Иванович

Решение Задач по Физике для Школьников

Часть 1

КИНЕМАТИКА

Сайт автора: **www.reppofiz.info**

Электронная почта: **reppofiz@mail.ru**

*****

Маленькое предисловие.

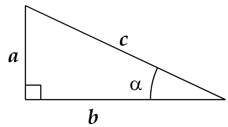
Этой небольшой разработкой начинается целый цикл книжек, призванных помочь решать задачи по физике. В основном, это обобщение многолетней работы со школьниками как на подготовительных курсах, так и индивидуально. Изложение материала идёт с **самых азов**, и рассчитаны эти методички на **учеников слабо или средне знающих физику**. Но, я думаю, что и хорошо понимающие физику ученики (как они про себя думают) тоже найдут в них много полезного.

И ещё хочу остановиться на одном моменте. Местами в разработке мне приходится обращаться к **ученику** с указанием его пола (сам, самому и т.п.). Но это абсолютно не значит, что я плохо отношусь к **ученицам** (как раз наоборот, с девушками, порой, намного проще и приятнее заниматься). Просто в тексте мне было лень добавлять слова (как это обычно делается в скобках) типа сама или самой.

*****

Прежде всего, надо сказать следующее. При решении задач по физике **необходимы элементарные знания по математике**. Поэтому, если у тебя слабенькая тройка по математике, то я советую в первую очередь подтянуть именно математику, а затем садиться за физику.

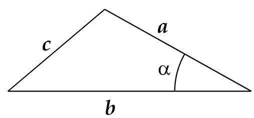
Я напомню тот минимум знаний по математике, который тебе понадобится. В первую очередь – это умение решать *обычные линейные уравнения*, *системы таких уравнений*, иногда придётся решать *квадратные уравнения*. Также надо уметь строить и понимать *графики различных функций*. Нужны элементарные сведения из тригонометрии – что такое *синус*, *косинус* и т.п., и соотношения в *прямоугольном треугольнике*:



$$a = c \times \sin(\alpha)$$
$$b = c \times \cos(\alpha)\ ,$$
$$a = b \times \mathrm{tg}(\alpha)$$

теорема Пифагора:

$$c^2 = a^2 + b^2\ ,$$

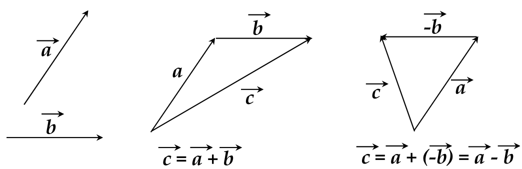


теорема косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha)\ .$$

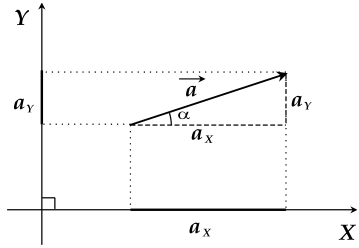
И, естественно, необходимо умение работы с ***векторами***, так как большинство физических величин (перемещение, импульс, напряженность электрического поля и многие другие) являются векторными величинами, то есть они характеризуются как числом (говорят *модулем вектора*), так и *направлением*. При этом модуль вектора – величина всегда положительная (по определению). Конечно, есть и скалярные величины (масса, время, температура и т.д.), которые характеризуются только числом (некоторые из них бывают только положительными, а некоторые – как положительными, так и отрицательными).

Вспомним *действия с векторами*. Для того чтобы сложить два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ надо соединить начало одного (например, $\vec{b}$) с концом другого ($\vec{a}$) и провести



вектор из начала $\vec{a}$ в конец $\vec{b}$. Это и будет сумма двух векторов. Для того чтобы вычесть один вектор из другого, лучше не запоминать новых правил, а сложить вектор $\vec{a}$ и вектор –, $\vec{b}$ который отличается от вектора $\vec{b}$ только направлением (он направлен в противоположную сторону).

Кроме сложения и вычитания векторов часто требуется *проецировать вектора на координатные оси*. Для этого надо из начала и конца вектора опустить перпендикуляры на ось. Тот отрезок, который при этом получается на оси, является проекцией вектора (в зависимости от оси a_x или a_y). Проекция считается положительной, если конец вектора имеет бóльшую координату чем начало (то есть, вектор направлен по оси), и отрицательной в противном случае (на рисунке обе проекции положительны). Если вектор перпендикулярен оси, то естественно, его проекция равна нулю. Так как мы будем пользоваться прямоугольной системой координат, причем, в подавляющем большинстве случаев будет достаточно двух осей (плоские задачи), то проекции вектора на оси всегда друг другу перпендикулярны и вместе с самим вектором образуют прямоугольный треугольник (будьте внимательны – в случае, если используются проекции на три координатные оси, вектор будет диагональю прямоугольного параллелепипеда). Следовательно, для них применимы все соотношения прямоугольного треугольника. Зная модуль вектора – ***a*** и угол с одной из осей (допустим OX) – **α**, можно найти его проекции:



$$\boxed{a_x = a \times \cos(\alpha) \qquad a_y = a \times \sin(\alpha)}, \qquad (1)$$

и наоборот, зная проекции, можно найти модуль вектора и угол, который он будет составлять с осью OX:

$$\boxed{a^2 = a_x^2 + a_y^2 \qquad tg(\alpha) = \frac{a_y}{a_x}}. \qquad (2)$$

Еще на одном моменте хочется остановиться. Дело в том, что предлагаемые разработки не являются заменой школьного курса физики, а являются его *дополнением*. Я очень надеюсь, что мы с тобой в основном будем *вспоминать физику*. Но, вероятно, иногда ты будешь узнавать и что-то новое или по новому посмотришь на известные тебе законы и явления. При этом давай сразу договоримся об одной вещи. **Физика – наука очень простая.** Главное – *понять и запомнить несколько основных законов*, описывающих явления природы. Причем, таких законов (и уравнений, связывающих физические величины) немного. Так, например, в механике (а это один из самых больших разделов физики) их не более 10 – 12. Если ты не будешь *бояться решать задачи*, не будешь постоянно говорить себе, что я мол дурак и ничего в этой задаче не понимаю, а спокойно **постараешься разобраться в явлении, происходящем в этой задаче, и напишешь основные уравнения, описывающие эти явле-**

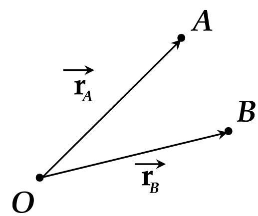
ния, то любая задача (я подчеркиваю – **любая задача**, так как **не бывает простых и сложных задач**) станет тебе под силу!

Следуя сложившейся традиции, мы разобьем весь курс физики на несколько разделов. Большие разделы: *механика, молекулярная физика и термодинамика, электричество, магнетизм, колебания и волны, оптика, атомная (квантовая) физика*. Каждый большой раздел также разобьем на подразделы (например, механику принято делить на *кинематику, динамику, законы сохранения, статику* и т.д.). С одной стороны такое деление упрощает как изложение материала, так и его усвоение, но с другой стороны надо четко себе представлять, что *подобное деление весьма условно*. Почти всегда **явления природы нельзя описать законами только из одного раздела (и, тем более, подраздела)**. И, вообще, это деление придумал *человек, а не природа*. Упавший на голову кирпич, и от этого расколовшийся и слегка нагревшийся, понятия не имеет, что изменение его состояния надо описывать уравнениями из разных разделов. Так и для тебя в конце обучения **физика должна превратиться в единую науку без всякого рода деления**, и ты не будешь думать из какого раздела писать уравнения.

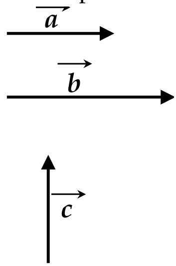
*****

И так, начнём с *кинематики*. К сожалению, это *самый скучный раздел*. В нём больше математики, чем физики. Но пусть тебя это не пугает. Без определений кинематики изучение физики весьма затруднительно (если и вообще возможно). Так что, придётся немного потерпеть, да к тому же и в кинематике можно найти много интересного. Кинематика изучает механическое состояние тела (положение тела, его движение и т.п.). Кстати, до определённого момента любое тело (будь то человек, санки, машина и т.д.) мы будем считать **материальной точкой**, то есть объектом, **имеющим массу** (и другие механические характеристики), но **не имеющим размеров**. Только в некоторых задачах на закон всемирного тяготения, а также в задачах на равновесие (статика) и плавание тел (гидростатика) нам надо будет учитывать размеры тел.

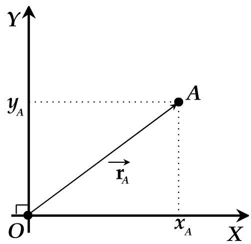
Положение и движение тел является **относительным**. Так, например, можно сказать, что стул находится на расстоянии пол-метра от стола, а можно сказать, что на расстоянии 2-х метров от окна. И то и другое будет верным, хотя и не совсем точным (не указано в какую сторону от стола или окна). Также можно говорить, что водитель автобуса покоится, если смотреть на него, сидя в салоне автобуса, а можно говорить, что он перемещается (едет), если стоять на дороге. Таким образом, всегда *необходимо ввести точку* (связанную с каким либо объектом, как, например стол, или просто точку пространства), *относительно которой, мы и будем рассматривать положение и движение наших тел*. Такая точка называется **началом отсчёта** (точка O на рисунке). Во избежание путаницы давай сразу будем говорить не о математической *системе координат*, а о физической *системе отсчёта*, которая включает в себя **систему координат и время** (то есть, говоря о положении тел, мы будем подразумевать и момент времени, когда это положение реализуется). Тогда положение любого тела (допустим A) может быть задано с помощью вектора OA, который



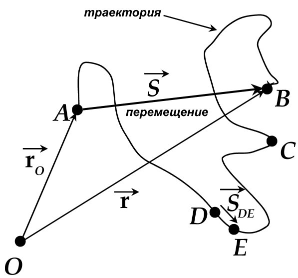
называется **радиус-вектор** $\vec{r}_A$. Это самая простая система отсчёта и все уравнения мы будем писать в ней. Радиус-вектор однозначно связан с положением тела, то есть, если тело находится в другом месте (точка В), то и радиус-вектор $\vec{r}_B$ также другой. Здесь важно понять один момент. Если мы сравниваем скалярную характеристику (например, массу) и говорим, что тело А имеет массу 5 кг и тело В массу 5 кг, то можно сделать вывод что их масса одинаковая. Но если мы сравниваем векторную величину (например, скорость) и говорим, что машина А имеет скорость 60 км/ч и машина В имеет скорость 60 км/ч, то *никаких выводов делать ещё нельзя*, потому, что мы не знаем, **куда** они едут. В частности, если они едут *не в одну сторону, то их скорости разные!!!* Рассматривая векторную величину, мы обязаны говорить о её **модуле** (60 км/ч) и **о направлении вектора** (к примеру, на юг). Сравните вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Так $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, но у них разный *модуль*, вектор $\vec{c}$, имеет такой же модуль, как $\vec{a}$ и , но *направлен в другую сторону*. Следовательно, все три вектора – **разные!**



Но работать с векторами намного сложнее, чем со скалярными величинами. Поэтому, мы чаще будем использовать другую систему отсчета. Она состоит из *начала отсчёта и трёх взаимно перпендикулярных координатных осей* (почти все задачи у нас будут **плоскими**, и нам будет **достаточно двух осей**). Такая система называется *прямоугольной* (или декартовой). Положение тела А в такой системе задаётся его **координатами** x_A и y_A. Координаты являются величинами проекций радиус-вектора на оси X и Y и, следовательно, связаны между собой формулами (1) и (2), где вместо **а** надо взять r_A, а вместо a_X и a_Y – x_A и y_A соответственно, а угол α – это угол между радиус-вектором и осью X.



Вспомним основные характеристики движения. Пусть тело находилось в точке А. Далее, двигаясь по линии, проходящей через точки D, E и C, через некоторое время оказывается в точке В. Линия, по которой двигалось тело, называется **траекторией**. Её длина – **пройденный путь** (обозначим L). Вектор, соединяющий начальную точку (А) и конечную точку (В), называется **перемещением** (будем обозначать перемещение вектором $\vec{S}$). Модуль перемещения (длина отрезка АВ) и путь, а также модуль радиус-вектора, координаты тела и т.п., чаще всего будем измерять в метрах. Однако, существуют ситуации, когда проще измерять в других единицах. Например, расстояние между городами лучше измерять в километрах, а расстояние, пройденное муравьем (см. задачу №1) – в сантиметрах. В международной системе единиц (СИ) расстояние измеряется в метрах (м), время – в секундах (с). Если начальное положение тела задать радиус-вектором $\vec{r}_0$, конечное – $\vec{r}$, то, как видно из рисунка, между радиус-векторами и перемещением существует связь:



$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{S}}. \qquad (3)$$

Двигаться из точки A в точку B тело могло достаточно сложным способом. Например, до точки C оно дошло быстро, в точке C немного постояло и затем медленно доползло до точки B. Чтобы передать как-то характер движения вводится ещё одна характеристика, которая называется **скорость**. При этом различают несколько видов скоростей. Если мы разделим весь пройденный путь L на время, в течение которого происходило перемещение t, то получим так называемую **среднюю путевую скорость** (или **среднюю скорость движения**):

$$\boxed{v_{cp}^{L}=\frac{L}{t}}. \tag{4}$$

Если же разделить всё перемещение на время, то получим **среднюю скорость перемещения**. Чаще речь будет идти о модуле этой скорости:

$$\boxed{\left|\vec{v}_{cp}^{S}\right|=\frac{\left|\vec{S}\right|}{t}}. \tag{5}$$

Но более точную информацию о движении в определённый момент времени даёт так называемая **мгновенная скорость**. Именно её мы и будем подразумевать, когда будем говорить о скорости тела (опуская слово мгновенная), и именно она войдёт у нас в основные уравнения движения. У мгновенной скорости достаточно сложное определение. Пусть тело при движении переместилось из точки D в точку E (см. рисунок на предыдущей странице). Тогда, мгновенной скоростью тела в точке D называется следующий предел: $\vec{v}=\lim\limits_{t_{DE}\to 0}\frac{\vec{S}_{DE}}{t_{DE}}$, где $t_{DE}\to 0$ означает, что точка E должна лежать как можно ближе к точке D (говорят – бесконечно близко). Мгновенная **скорость – величина векторная!** Она направлена по *касательной к траектории* в точке D по движению тела (в сторону точки E). В международной системе единиц скорость измеряется в *метрах в секунду* (м/с), но мы иногда будем использовать и внесистемные единицы, например, километры в час (км/ч).

Если скорость остаётся величиной постоянной (то есть *не меняется ни модуль скорости, ни направление движения*), то такое движение называется **равномерным**. Оно может быть только при движении по *прямой линии*! При этом модуль мгновенной скорости всегда равен средней скорости (как по пути, так и по перемещению). Однако, чаще мы наблюдаем движение, когда скорость тела меняется. Характеристикой, показывающей как меняется скорость, является **ускорение**. Определяется ускорение $\vec{a}$ аналогично скорости: $\vec{a}=\lim\limits_{t_{DE}\to 0}\frac{\vec{v}_E-\vec{v}_D}{t_{DE}}$, то есть надо взять разницу между мгновенными скоростями тела в бесконечно близко расположенных точках траектории E и D и разделить на время движения из D в E. Таким образом получается мгновенное ускорение. Как видите, **ускорение величина тоже векторная!** Если оно не меняется, то такое движение называется **равноускоренным** (иногда, если скорость уменьшается, движение называют равнозамедленным, но мы этот термин использовать не будем). В СИ ускорение измеряется в *метрах на секунду квадратную* (м/с^2).

В обычной жизни при движении различных тел их ускорения чаще всего не остаются постоянными. Следовательно, можно ввести характеристику, показывающую как меняется ускорение. Но этого никогда не делают по одной простой причине. Дело в том, что координата, скорость и ускорение тела связаны не только между собой, но и с другими физическими величинами, характеризующими состояние тела – с *энергией тела, его импульсом, силами, действующими на него*. В свою очередь нет такой физической величины (по крайней мере в настоящий момент), которая связывалась бы с характеристикой изменения ускорения.

К тому же в рамках школьной программы рассматривается в основном только *равноускоренное движение* (исключением является *движение по окружности* и *механические колебания*, которые мы рассмотрим отдельно). А в этом случае знак предела в определении можно опустить и выражение записать следующим образом: $\vec{a}=\dfrac{\vec{v}-\vec{v}_0}{t}$, где под $\vec{v}_0$ подразумевается начальная скорость тела, под $\vec{v}$ – скорость тела через время *t* (уже *не бесконечно малое, а любое*). Отсюда можно получить основные законы равноускоренного движения:

закон изменения скорости

$$\boxed{\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}t} \qquad (6)$$

закон для перемещения

$$\boxed{\vec{S}=\vec{v}_0 t+\frac{\vec{a}t^2}{2}} \qquad (7)$$

и, использую формулу (3) – **закон для радиус-вектора** (координат тела):

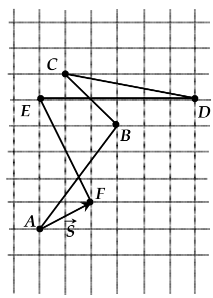
$$\boxed{\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{v}_0 t+\frac{\vec{a}t^2}{2}} \qquad (8)$$

В случае равномерного движения в этих уравнениях надо положить $\vec{a}$ равным нулю.

Перейдём к рассмотрению задач.

Задача №1.

Юный зоолог, наблюдая движение муравья, зарисовал его траекторию (ABCDEF) за 10 секунд. Найти путь, перемещение муравья, а также его среднюю путевую скорость и среднюю скорость перемещения, если длина сторон клетки равна 1 см.



Решение.

Чтобы найти путь тела, надо найти длину его траектории. В данном случае длину ломаной линии ABCDEF. Найдём по отдельности длину каждого участка: $AB=\sqrt{3^2+4^2}=5\,\text{см}$, $BC=\sqrt{2^2+2^2}\approx 2{,}8\,\text{см}$, $CD=\sqrt{5^2+1^2}\approx 5{,}1\,\text{см}$, $EF=\sqrt{2^2+4^2}\approx 4{,}5\,\text{см}$ – это всё по теореме Пифагора, а $DE=6\,\text{см}$. Следовательно, весь путь $L=5+2{,}8+5{,}1+6+4{,}5=23{,}4\,\text{см}$. По формуле (4) средняя путевая скорость

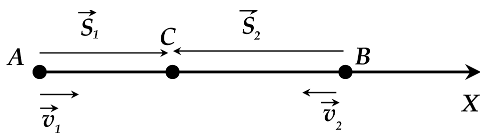
$v=\frac{23,4}{10}=2,34\,см/с$. Перемещение частицы на рисунке обозначено вектором $\vec{S}$. Его модуль, то есть длину отрезка AF, можно также найти по теореме Пифагора $|\vec{S}|=\sqrt{2^2+1^2}\approx 2,2\,см$. Наконец, по формуле (5) $|\vec{v}|=\frac{2,2}{10}=0,22\,см/с$ – модуль средней скорости перемещения.

Задача №2.

Ласточка вылетает из гнезда и летит вдоль прямой линии навстречу стрекозе со скоростью v_1 = 5 м/с. Скорость ничего не подозревающей стрекозы – v_2 = 2 м/с. Через какое время и на каком расстоянии от гнезда ласточка поймает стрекозу, если начальное расстояние между ними L = 28 м?

Решение.

Прежде всего, сделаем рисунок для этой задачи. **Запомни один совет**. Так как подавляющее количество задач в механике (да и в других разделах физики) требуют использования *векторных величин*, то без рисунка правильно решить задачу – *очень и очень сложно*. Более того, даже при решении задач с не векторными величинами наличие рисунка порой очень упрощает дело. Так что привыкай сразу – **рисунок делать надо!!!** Пусть он будет корявым, пусть некрасивым или даже не получится с первого раза, но он **необходим**. При этом на рисунке надо показать как можно *больше физических величин*, использующихся при решении задачи. **Векторные же характеристики должны быть все!**



Пусть A – гнездо ласточки, B – положение стрекозы в начальный момент, C – место встречи. Ось X направим из A в B. До встречи ласточка совершит перемещение $\vec{S}_1$, а стрекоза – $\vec{S}_2$. Кроме того, покажем на рисунке вектора скоростей $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Движения тел равномерное – ускорений нет. Уравнение (7) в векторном виде будет выглядеть следующим образом: $\vec{S}=\vec{v}_0 t$. А в проекции на ось X: $S_1=v_1 t$ для ласточки и $-S_2=-v_2 t$ для стрекозы. Знак (–) во втором уравнении появился из-за того, что и **перемещение и скорость стрекозы направлены против оси X**. Время t – одинаковое для обоих тел. Естественно, второе уравнение можно переписать как: $S_2=v_2 t$. Учитывая, что $S_1+S_2=L$ (см. рисунок), мы получаем систему из трёх уравнений с тремя неизвестными. Решая её (в последнее уравнение подставляем S_1 и S_2 из первых двух), можно найти время встречи $t=L/(v_1+v_2)=4\,с$, а затем и расстояние до гнезда $S_1=20\,м$.

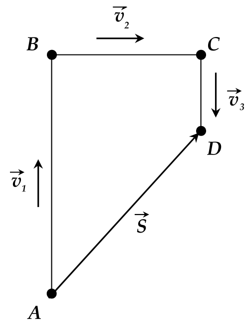
Эту задачу можно решить с использованием закона (8). Пусть в точке A будет начало координатной оси X. Так как движение происходит вдоль одной оси, то *радиус-вектор просто превращается в координату x*. Тогда координаты ласточки и стрекозы будут меняться по законам: $x_1=v_1 t$; $x_2=L-v_2 t$. Во втором уравнении L является начальной координатой стрекозы. По условию тела встретились, следовательно, **они находятся в одной точке, то есть $x_1 = x_2$!!!** Кстати, отметь для себя этот момент – когда тела встречаются – у них одинаковые координаты в одно и то же время. Подставляя в последнее равенство выражения для x_1 и x_2, мы получаем точно такие же ответы, как и при первом решении.

Оба способа решения близки друг другу. Какой выберешь ты – решай сам. В качестве маленького совета могу лишь сказать, что при решении задач с двумя и более тел чаще более удобным является второй (через координаты) способ, хотя на этом примере это и не заметно.

Задача №3.

Велосипедист проехал половину пути до дома по прямому шоссе со скоростью v_1 = 20 км/ч, далее свернул на просёлочную дорогу, перпендикулярную шоссе, и проехал по ней со скоростью v_2 = 10 км/ч 2/3-ти оставшегося пути, затем слез с велосипеда и прошел остаток пути по тропинке, параллельной шоссе, со скоростью v_3 = 5 км/ч в сторону, противоположную движению по шоссе. Найти среднюю скорость движения и перемещения велосипедиста.

Решение.



Начнём решение задачи с рисунка. Пусть точка A – начальная точка, B – место поворота на просёлочную дорогу, C – место поворота на тропинку и D – дом. Покажем на рисунке *кинематические характеристики*: все скорости и результирующее перемещение. Так как движение равномерное, то по формуле (7) получаем: $AB=v_1 t_1$; $BC=v_2 t_2$; $CD=v_3 t_3$, где AB, BC и CD – модули перемещений, а t_1, t_2 и t_3 – соответствующие времена движения на различных участках. Если весь путь обозначить за L, то по условию задачи $AB=L/2,\quad BC=(2/3)\times(L/2)=L/3,\quad CD=(1/3)\times(L/2)=L/6$. Используя это, можно выразить каждое время и, затем, полное время движения через скорость и путь:

$$t_1=\frac{AB}{v_1}=\frac{L}{2v_1}\ ,\quad t_2=\frac{BC}{v_2}=\frac{L}{3v_2}\ ,\quad t_3=\frac{CD}{v_3}=\frac{L}{6v_3}\ ,$$

$$t=t_1+t_2+t_3=\frac{L}{40}+\frac{L}{30}+\frac{L}{30}=\frac{11L}{120}\ .$$

Я *подставил значения скоростей*, чтобы **не усложнять решение**. Тогда по формуле (4) получаем $V_{cp}^{L}=\frac{120}{11}\approx 10{,}9\,\text{км/ч}$.

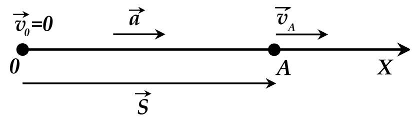
В подобных задачах очень часто допускают ошибку, пытаясь найти среднюю скорость по математической формуле среднего $\frac{v_1+v_2+v_3}{3}$. Это абсолютно **не верно!!!** В данной задаче неправильный ответ получился бы 11,7 км/ч!

Чтобы найти среднюю скорость перемещения, надо выразить модуль перемещения (отрезок AD) через путь L. Если мысленно опустить из точки D перпендикуляр на отрезок AB, то можно воспользоваться теоремой Пифагора и получить выражение $|\vec{S}|=\sqrt{(AB-CD)^2+BC^2}=\sqrt{2}\,L/3$. Соответственно, по формуле (5) $V_{cp}^{S}\approx 5{,}1\,\text{км/ч}$.

Задача №4.

Спринтер при старте набрал за 2 секунды скорость 10 м/с, двигаясь равноускоренно. Найти его ускорение и пройденный за это время путь.

Решение.



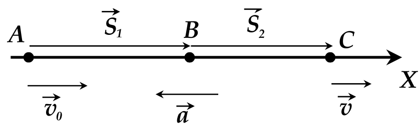
Покажем на рисунке *необходимые величины*. Ось X направим по направлению движения. Так как скорость спринтера растёт, то ускорение направлено также по движению (по скорости). Это можно понять, если проанализировать формулу (6) – вектор $\vec{v}$ будет увеличиваться, если он направлен по вектору $\vec{a}$! Впрочем, если ты не знаешь, куда направить ускорение – ничего страшного – направляй куда-нибудь (в этой задаче, естественно, либо по движению, либо против). Знак ответа даст тебе правильное направление: **если получится (+), то ускорение было направлено правильно, ну а если (–), то в другую сторону**.

Запишем формулы (6) и (7) в проекции на ось X для данной задачи: $v_A=at;\ S=\frac{at^2}{2}$. По условию начальная скорость $v_0=0$, а так как все вектора направлены по оси X, то везде знаки (+). Из первой формулы можно найти ускорение $a=\frac{v_A}{t}=5\,\text{м/с}^2$, подставляя которое во вторую формулу получим перемещение (и путь, так как движение происходит вдоль прямой в одну сторону): $S=10\,\text{м}$.

Задача №5.

При торможении автомобиль, двигаясь с постоянным ускорением, за время τ_1 = 2 секунды прошел расстояние S_1 = 24 метра, за последующие τ_2 = 3 секунды – расстояние S_2 = 21 метр. Найти ускорение автомобиля, а также начальную и конечную скорости.

Решение.



Начнем, как всегда с рисунка. В отличие от предыдущей задачи здесь два участка – два перемещения $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$. Кроме того, обозначим начальную скорость в точке A и конечную – в точке C. Так как автомобиль тормозит, то ускорение должно быть направлено в противоположную по отношению к скорости сторону. После чего запишем уравнение (7) в проекции на ось X для двух участков: $S_1=v_0\tau_1-\frac{a\tau_1^2}{2}$,

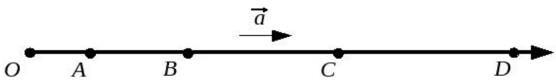
$S_1+S_2=v_0(\tau_1+\tau_2)-\frac{a(\tau_1+\tau_2)^2}{2}$ (знак (–) перед ускорением появился потому, что оно направлено против оси X). В качестве второго участка я выбрал весь путь S_1 + S_2. Если выбрать просто участок S_2, то тогда придётся вводить скорость в точке B (она будет начальной для второго участка). В этом ничего страшного нет, и задача также будет решена, просто чуть сложнее – потребуется еще одно уравнение (советую сделать это тебе самостоятельно). А так мы получили два уравнения, в которых два неизвестных начальная скорость v_0 и ускорение $\boldsymbol{a}$. Лучше сразу подставить данные задачи и решать обыкновенную систему из двух уравнений (можно, например, выразить из первого уравнения ускорение $\boldsymbol{a}$ и подставить его во второе, из которого уже найти скорость v_0). Решение даст ответ v_0 = 14 м/с, $\boldsymbol{a}$ = 2 м/с^2. Причём ускорение будет со знаком (+). Это означает то, что мы *правильно направили ускорение на рисунке*.

Конечную скорость найдём из уравнения (6): $v=v_0-a(\tau_1+\tau_2)=4\,\text{м/с}$.

Задача №6.

За 2-ю секунду от начала прямолинейного равноускоренного движения автомобиль прошел 12 м. Какое расстояние пройдет автомобиль за 4-ю секунду?

Решение.

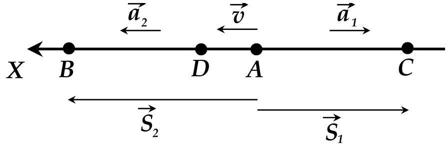


Начальная скорость равна нулю (в условии сказано «от начала движения»), значит движение будет происходить в сторону ускорения. Отметим на рисунке положение автомобиля в различные моменты времени. Пусть точка *O* – место старта, точка *A* – положение автомобиля через 1 секунду, точка *B* – положение автомобиля через 2 секунды. Смотри внимательно: по условию дан путь за **вторую** секунду, а не за **две** секунды! То есть дано расстояние *AB*. Иными словами, если в формулу (7) подставить время 2 секунды, мы не получим 12 метров, а получим расстояние *OB*. Расстояние же *AB* можно выразить как разность перемещений за **две** секунды (*OB*) и за **первую** секунду (*OA*). Следовательно: $OB=\frac{at^2}{2}=\frac{a(2)^2}{2}=2a$, $OA=\frac{a(1)^2}{2}=\frac{a}{2}$, $12=OB-OA=2a-\frac{a}{2}=\frac{3a}{2}$. Значит, ускорение автомобиля a = 8 м/с^2. Точно так же можно представить перемещение автомобиля за **четвертую** секунду (*CD*): перемещение за **четыре** секунды (*OD*) минус перемещение за **три** секунды (*OC*). $CD=\frac{a(4)^2}{2}-\frac{a(3)^2}{2}=\frac{7a}{2}=28$ метров. (Рисунок в задаче выполнен, естественно, не в масштабе)

Задача №7.

От поезда, идущего равномерно в гору со скоростью v = 10 м/с, отцепляется последний вагон и начинает двигаться с ускорением a_1 = 2 м/с^2, направленным воль полотна вниз. Поезд, в свою очередь, приобретает ускорение a_2 = 0,1 м/с^2, направленное вверх. Найти расстояние между поездом и вагоном через τ = 20 секунд.

Решение.



Покажем на рисунке характеристики движения. Пусть вагон отцепится в точке *A*. Поезд после потери вагона движется равноускоренно, его начальная скорость равна v = 10 м/с и за 20 секунд он пройдёт расстояние AB (S_2), причём, согласно закону (7) в проекции на ось X получим:

$S_2 = v\,t + \frac{a_2 t^2}{2} = 220\,\text{метров}$. Вагон также движется равноускоренно, но учти, что начальная скорость вагона тоже *v* = 10 м/с! Попробуй выйти из двигающегося автобуса – тебя понесёт по ходу движения, потому что у тебя будет начальная скорость, равная скорости автобуса! Так и вагон. Он не может мгновенно остановиться, он вначале будет двигаться за поездом, пока его скорость не уменьшится до нуля (допустим до точки *D*). Но так как его скорость начинает уменьшаться, то он будет от поезда отставать, и сидящим в поезде будет казаться, что вагон едет вниз. Только доехав до точки *D*, вагон начнёт движение обратно и через 20 секунд окажется где-то в точке *C* (кстати, точка *C* может оказаться и левее точки *A*). Закон для перемещения вагона (7) в проекции на ось X: $-S_1 = v\,t - \frac{a_1 t^2}{2} = -200\,\text{метров}$, то есть S_1 = 200 метров. Так как S_1 *положительное* (то есть рисунок правильный), то расстояние между поездом и вагоном будет $S = S_1 + S_2 = 420\,\text{метров}$.

Если бы мы получили S_1 *отрицательным*, то это как раз и означало бы, что точка *C* лежит левее точки *A*, и мы ошиблись с рисунком (не со всем рисунком, естественно, а только с направлением S_1). Тогда, естественно, расстояние было бы $S = S_2 - S_1$. Но эту проблему со знаками можно обойти, если решать задачу с помощью координатного уравнения (8). Для этого, правда, надо вспомнить ещё одну математическую формулу – формулу расстояния между двумя точками на координатной плоскости: $S = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. В нашем случае она превращается в $S = x_2 - x_1$, где x_1 и x_2 – координаты вагона и поезда относительно некоторого начала системы отсчета (естественно, его нужно будет показать на рисунке). Предлагаю тебе самому сделать такое решение.

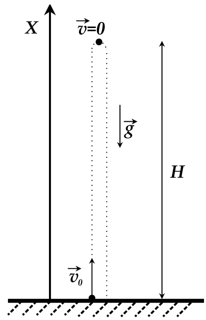
*****

Одним из самых распространённых (из *равноускоренных) движений* является ***движение тела в поле тяжести Земли***. Если считать, что на тело действует только сила тяжести (раздел, изучающий силы, называется ***ДИНАМИКА***), пренебрегая силами со стороны воздуха (сопротивления, подъёмной силой и т.п.), – так называемое **свободное падение**, то у всех тел будет одно и то же ускорение, которое *направлено к центру Земли и по модулю равно* g = *9,8 м/с*^{2} (≈ 10 м/с^2). Обычно для кинематических задач Землю рисуют плоской, а ***ускорение направляют вертикально вниз***. Это ускорение называют ***ускорением свободного падения***. Причём, несмотря на название, абсолютно не играет роли как тело движется – падает, летит вертикально вверх или по более сложной траектории. Задачи с движением в поле тяжести Земли решаются абсолютно так же, как и предыдущие, только в формулах (6)–(8) вместо ускорения $\vec{a}$ мы обязаны использовать ускорение свободного падения $\vec{g}$.

Задача №8.

Юный "орнитолог", пытаясь попасть в ворону, стреляет из рогатки вертикально вверх. Начальная скорость пульки 20 м/с. На какой высоте должна лететь ворона, чтобы остаться невредимой? Через какое время и с какой скоростью пулька свалится на голову "орнитолога"? Размерами "любителя птиц" пренебречь.

Решение.



Направим на рисунке для этой задачи ось X вертикально вверх. По условию стрельба происходит также вертикально вверх, значит, туда направим начальную скорость пульки v_0. Кроме того, мы знаем, что у пульки будет ускорение $\vec{g}$, направленное вертикально вниз. Так как скорость и ускорение направлены в разные стороны, то движение вначале будет замедленным и на траектории обязательно будет точка, когда скорость станет равной нулю. Это будет наивысшая точка подъёма пульки. Дальше пулька станет двигаться равноускоренно вниз. Обозначим высоту, на которую поднимется пулька, за *H*. Кстати, траектория на рисунке показана не совсем правильно – тело будет двигаться вниз по тому же самому пути, что и вверх. Я раздвинул эти пути только для наглядности.

Запишем те же уравнения (6) и (7) в проекции на ось X:

$$v=v_0-gt\,,\quad S=v_0t-\frac{gt^2}{2} \qquad (*).$$

Учитывая, что конечная скорость на высоте *H* равна нулю, из первого уравнения найдем время подъёма $t_{вверх}=\frac{v_0}{g}=\frac{20}{10}=2\,\text{с}$. Подставив это время во второе уравнение, найдем перемещение вверх (то есть высоту) $H=S=20\,\text{м}$. Следовательно, вороне надо лететь на высоте большей 20 метров.

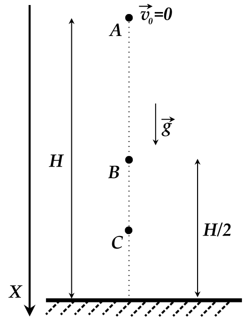
Для ответа на другие вопросы задачи мы не будем рассматривать движение вниз, как это иногда делают, а воспользуемся теми же формулами (*). Ведь когда пулька вернётся к месту старта (на голову), её *результирующее перемещение станет равным S = 0!!!* Значит полное время полёта $t_{пол}$ = 4 с. Это получается решением второго уравнения (*). Оно квадратное, поэтому есть еще один корень t = 0. Но этот ответ не имеет практического применения и должен быть отброшен (кстати, **получаемые при решении ответы полезно всегда проанализировать** – это зачастую уберегает от ошибок). Зная полное время полёта, можно из первого уравнения (*) найти конечную скорость $v=20-10\times 4=-20\,\text{м/с}$. Знак (–) указывает на то, что скорость направлена против оси X (и действительно, пуля то вниз летит).

Отметь для себя и запомни один полезный момент. Время полёта вверх было 2 с, полное время – 4 с, значит, вниз тело летело также 2 с. Так вот, как бы тело не бросали, *время полёта* ***вверх*** *между* ***двумя любыми горизонтальными уровнями*** *будет равно времени полёта* ***вниз*** *между* ***теми же уровнями*** (в данной задаче этими уровнями являлись поверхность земли и наивысшая точка полёта). Также посмотри на скорости: *с какой скоростью тело полетело – с такой же (по модулю) скоростью оно упадёт*. Правда, я еще раз хочу подчеркнуть, что **мы решаем идеализированные задачи – задачи, в которых отсутствует сила сопротивления воздуха**. В реальности эта сила приводит к тому, что время полёта вниз больше времени полёта вверх, а конечная скорость меньше начальной.

Задача №9.

С воздушного шара, покоившегося на высоте H = 180 метров, без начальной скорости был сброшен балласт. Найти перемещение балласта в последнюю секунду падения, а также среднюю скорость на нижней половине пути.

Решение.



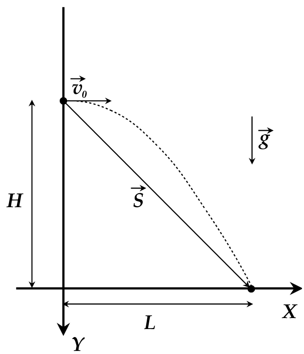
В данной задаче координатную ось X удобней направить вниз. Рисуем вниз ускорение $\vec{g}$. Пусть A – начальная точка, B – середина пути, C – положение балласта за секунду до падения на землю. Запишем формулу (7) для различных участков пути: $H=\frac{g t^2}{2}$ – для всего пути, $AB=\frac{H}{2}=\frac{g t_{AB}^2}{2}$ – для участка AB, $AC=\frac{g t_{AC}^2}{2}$ – для AC. Во всех уравнениях ускорение положительно, так как оно совпадает по направлению с осью X. Из первого уравнения можно найти полное время полёта $t=\sqrt{2H/g}=6\,c$. Значит $t_{AC}=t-1=5\,c$. Следовательно, из третьего уравнения AC = 125 м, а перемещение в последнюю (6-ю секунду) равно $H - AC$ = 55 метров.

Из второго уравнения можно найти $t_{AB}\approx 4{,}2$ секунды, то есть время движения на нижней половине $t_{ниж}=t-t_{AB}\approx 1{,}8$ секунды. Тогда средняя скорость на нижней половине по формуле (4) $v_{ср}\approx 90/1{,}8 = 50$ м/с.

Задача №10.

С балкона в горизонтальном направлении со скоростью v_0 = 15 м/с бросают мяч. Дальность полёта мяча по горизонтали оказалась равна высоте бросания. С какой высоты бросили мяч?

Решение.



В отличие от предыдущих задач, в этой задаче движение тела происходит не по прямым линиям, а по более сложной траектории (*можно доказать, что это парабола*) – движение по плоскости. Поэтому, для решения необходимы две оси. Направим ось X горизонтально, а ось Y вертикально вниз. Тем не менее, **движение мяча – это равноускоренное движение с ускорением свободного падения** $\vec{g}$, которое направлено вниз. Покажем на рисунке еще начальную скорость (она по условию горизонтальна), полное перемещение мяча до земли $\vec{S}$, а также высоту H, с которой брошен мяч, и дальность его полёта L.

Я напомню формулу (7) с учётом ускорения $\vec{g}$: $\vec{S}=\vec{v}_0 t+\frac{\vec{g} t^2}{2}$. Её необходимо спроецировать теперь на две оси. В проекции на ось X вектор $\vec{S}$ даёт дальность L

(см. рисунок), вектор $\vec{v}_0$ так и остаётся v_0, а проекция ускорения $\vec{g}$ равна нулю, так как ускорение перпендикулярно оси X. Следовательно, формула (7) выглядит так: $L = v_0 t$.

Проекции $\vec{S}$ на ось Y равна *H*, $\vec{v}_0$ – нулю (так как вектор начальной скорости перпендикулярен Y), а $\vec{g}$ так и остаётся g. Таким образом, формула (7) в проекции на ось Y: $H = \frac{g t^2}{2}$.

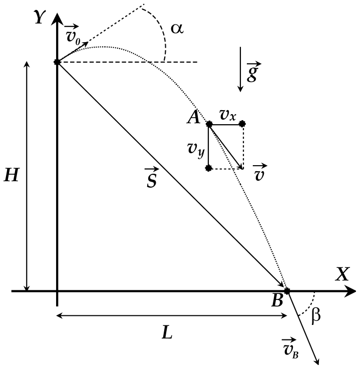
По условию *L* = *H*. Подставляя сюда выражения для *L* и *H*, найдём вначале время полёта мяча $t = \frac{2 v_0}{g} = 3$ секунды, а затем и высоту H = 45 метров.

Задача №11.

С крутого берега под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту вверх со скоростью $v_0 = 12$ м/с бросают камень. С какой скоростью камень плюхнется в воду, если долетит до неё за время $\tau = 2$ секунды? Найти также высоту, с которой бросили камень и дальность его полёта.

Решение.

Как и в предыдущей задаче, *движение камня будет происходить в плоскости* (по параболе), следовательно, *необходимы две оси*. В данном случае ось Y направим вверх (правда, никто не запрещает направить её и вниз – это всё дело твоего вкуса и удобства решения). Покажем как всегда все кинематические характеристики: начальную скорость (она по условию направлена под углом к горизонту), конечную скорость (в точке *B*), ускорение свободного падения, полное перемещение, а также высоту и дальность. Кроме того, я нарисовал скорость и её проекции в произвольный момент движения – в некоторой точке *A*, которая, впрочем, не нужна для решения задачи, а нужна лишь для более подробного объяснения. Именно эти проекции и меняются по законам, которые мы получаем, проецируя формулу (6) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} t$ на оси X и Y. На ось X вектор $\vec{v}_0$ проецируется в $v_0 \cos(\alpha)$ (см. формулу (1)), $\vec{g}$ в ноль (так как перпендикулярен оси); на ось Y проекция $\vec{v}_0$ равна $v_0 \sin(\alpha)$ (опять по формуле (1)), проекция $\vec{g}$ равна –g (вектор противоположен оси), следовательно:



$$v_x = v_0 \cos(\alpha)$$
$$v_y = v_0 \sin(\alpha) - g t \qquad (*)$$

То же самое будет при проекции формулы (7) на оси, только на ось X вектор $\vec{S}$ даёт *L*, а на ось Y получается –*H* (знак (–) появляется, так как вектор $\vec{S}$ направлен против оси). Следовательно:

$$L = v_0 \cos(\alpha) t$$

$$-H = v_0 \sin(\alpha) t - \frac{g t^2}{2} \qquad (**)$$

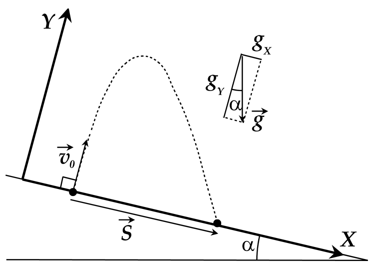
Если проанализировать формулы (*), то можно отметить, что проекция скорости на ось X не меняется со временем. То есть **движение по оси X – равномерное**. Проекция же скорости на ось Y сначала уменьшается и в верхней точке траектории становится равной нулю, а за тем начинает расти, но уже в направлении вниз. Кстати сама скорость в верхней точке траектории **не будет равна нулю – у неё сохранится горизонтальная составляющая**.

В общем, задача уже решена – все необходимые величины даны. Осталось в уравнения (*) и (**) подставить значения из условия, а вместо t взять время полёта τ. В итоге получим v_x = 10,4 м/с, v_y = –14 м/с – проекции скорости в момент падения. Следовательно, модуль вектора скорости можно найти по формуле (2): $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 17{,}4$ м/с и по ней же угол, который составляет скорость в точке B с горизонтом: $\mathrm{tg}(\beta) = \frac{v_y}{v_x} = -1{,}35$, значит $\beta \approx 53^0$ (знак (–) в выражении для тангенса в данном случае означает, что скорость направлена вниз). Из формулы (**) L = 20,8 метров, а H = 8 метров.

Задача №12.

Со склона горы стреляет пушка. Начальная скорость снаряда v_0 = 200 м/с и направлена перпендикулярно склону. На каком расстоянии от пушки упадёт снаряд, если уклон горы $\alpha = 10^0$.

Решение.



Сделаем рисунок. В отличие от предыдущих задач ось X направим не горизонтально, а вдоль склона горы (ось Y, естественно, перпендикулярно X). В принципе опять это дело вкуса – можно ось X направить и горизонтально – решение будет чуть-чуть сложнее (попробуй сделать это самостоятельно). Уравнение (7) в проекции на оси в нашем случае даёт следующее: $S_x = \frac{g \sin(\alpha) t^2}{2}$ – на ось X (вектор $\vec{v}_0$ перпендикулярен оси, поэтому проекция равна нулю, а $g_x = g \sin(\alpha)$), $S_y = v_0 t - \frac{g \cos(\alpha) t^2}{2}$ – на ось Y. Так как в момент падения на склон перемещение по оси Y станет равным нулю S_y = 0 (см. рисунок), то из второго уравнения можно найти время полёта: $t = \frac{2 v_0}{g \cos(\alpha)}$, и подставляя это время в выражение для S_x, получим: $S_x = \frac{2 v_0^2 \sin(\alpha)}{g \cos(2\alpha)} \approx 1{,}4$ км – а это и есть расстояние от пушки до точки падения (см. рисунок).

Внимательно посмотри на все предыдущие задачи. У всех у них разные условия, в них рассматривается разные по виду движения, но почти все задачи решаются с использованием основных уравнений кинематики – формул (6) и (7). Именно это я и имел в виду, когда утверждал и ещё раз повторяю, что физика – наука не сложная, надо лишь понять и запомнить небольшое количество законов. А ещё законы надо анализировать.

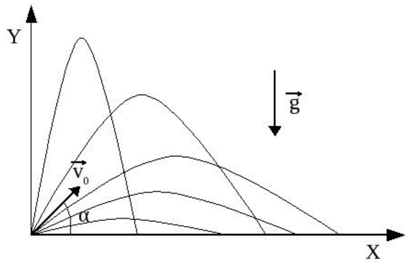
Для примера рассмотрим задачу, которую можно бы назвать сложной, но предпочту название задача с изюминкой (ты не забыл? – сложных задач не бывает).

Задача №13.

С какой минимальной скоростью нужно бросить камень, чтобы он мог перелететь через строение высотой H = 20 м и шириной L = 10 метров. Высотой начального положения камня пренебречь.

Решение.

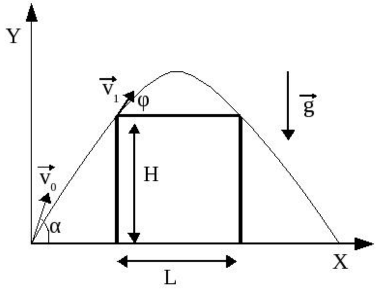
Два вопроса, которые возникает после прочтения условия – а под каким углом бросают камень? и что значит **минимальная** скорость? Поэтому, давай сначала рассмотрим несколько иную задачу: пусть камень бросают с одной и той же скоростью, но под различными углами к горизонту. Что можно тогда сказать о траектории камня?



Взяв начало координат в точке бросания, спроецируем уравнение (8) на оси: $x = v_0 \cos(\alpha) t\,;\quad y = v_0 \sin(\alpha) t - \frac{g t^2}{2}$. Если теперь выразить из первого уравнения время $t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$ и подставить его во второе, то получим: $y = \frac{-g}{2 v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2 + \mathrm{tg}(\alpha) x$ – это уравнение параболы, ветви которой направлены вниз, а точки пересечения с осью OX будут иметь следующие координаты: $x = 0$ и $x = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)$. Первая точка – это место бросания. А вот вторая – это **дальность полёта**! Кстати, если найти вершину параболы, то её y-координата будет, естественно, **высотой полёта**: $y = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2 g}$. Конечно, дальность и высоту можно находить физически (тогда ещё и время можно отыскать), как например, в задаче №8, но сейчас меня интересует именно математический аспект этой задачи.

Давай посмотрим на полученное выражение для дальности. Угол α меняется от 0 до 90°, то есть (2α) – от 0 до 180°. В этих пределах $\sin(2\alpha)$ возрастает от 0 до 1, а потом уменьшается снова до 0. При этом максимальное значения (1) синус примет при $2\alpha = 90^o \Rightarrow \alpha = 45^o$. Значит и дальность полёта будет вначале расти, достигнет максимального значения $L_{max} = \frac{v_0^2}{g}$ при $\alpha = 45^o$, затем начнет уменьшаться.

Если посмотреть на выражение для высоты, то можно сделать вывод, что при тех же изменениях угла α, высота всё время растёт и достигает максимума $H_{max}=\frac{v_0^2}{2g}$ при $\alpha=90^o$. На рисунке показаны траектории полёта при различных углах бросания.



Теперь перейдем к нашей задаче. Представь себе, что камень находится у самого угла строения (в точке *A*) и имеет там некоторую скорость v_1. Как ты думаешь, под каким углом должна быть направлена эта скорость? Если нам нужна **минимальная** скорость, то, конечно же, этот угол должен быть $\varphi=45^o$! Тогда дальность будет максимальной. Запишем (6) и (7) уравнения в проекции на оси (для точки *A*):

$$v_1\cos(45^o)=v_0\cos(\alpha) \qquad (1)$$

$$v_1\sin(45^o)=v_0\sin(\alpha)-gt \qquad (2)$$

, где *t* – время полёта до точки *A*, и формулу для

$$H=v_0\sin(\alpha)t-\frac{gt^2}{2} \qquad (3)$$

дальности полёта для участка AB: $L=\frac{v_1^2}{g} \quad (4)$.

Мы получили 4 уравнения с 4-мя неизвестными. Я решать эту систему не буду, но дам ответы (для простоты, когда будешь сам решать, подставь числа в уравнения). Итак, из (4) уравнения найдем v_1 = 10 м/с, из второго уравнения надо выразить комбинацию $v_0\sin(\alpha)$ и подставить её в уравнение (3), которое легко решается, несмотря на то, что квадратное, и даёт один отрицательный ответ, а другой положительный $t=\sqrt{2}\,\text{c}$. После подстановки всех найденных величин в (1) и (2) уравнения они будут выглядеть следующим образом: $\begin{matrix} v_0\cos(\alpha)=5\sqrt{2} \\ v_0\sin(\alpha)=15\sqrt{2} \end{matrix}$. Из них находим угол бросания $\text{tg}(\alpha)=3 \Rightarrow \alpha\approx71{,}6^o$ и начальную скорость $\sqrt{(5\sqrt{2})^2+(15\sqrt{2})^2}=10\sqrt{5}\approx22{,}4\,\text{м/с}$.

*****

Следующие две задачи можно вообще не называть физическими – они намного ближе к математике. Но *уметь представлять законы графически и уметь читать графики – это необходимо*. Поэтому мы обязаны такие задачи также рассмотреть.

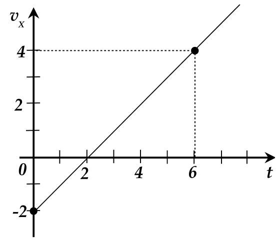
Задача №14.

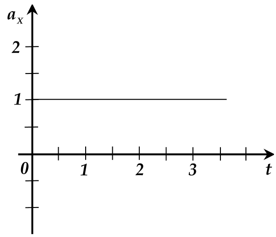
Некоторое тело двигается вдоль оси X. При этом его координата меняется по закону: $x=3-2t+0{,}5t^2$ м, где время измеряется в секундах. Построить график зависимости от времени скорости и ускорения этого тела.

Решение.

Если спроецировать формулу (8) на ось X, то получится $x=\pm x_0 \pm v_{0x} t \pm \frac{a_x t^2}{2}$,

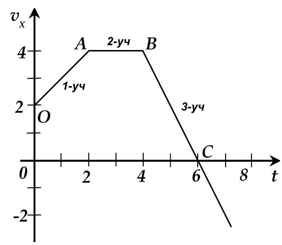
где v_{0x} и a_x – проекции скорости и ускорения на ось X, а выбор знака перед ними зависит от того, куда они направлены. Сравнивая данный в задаче закон с проекцией формулы (8), можно сказать следующее: начальная координата тела x_0 = 3 метра (это можно также получить, подставив t = 0 в закон), начальная скорость v_{0x} = –2 м/с (она стоит перед t), ускорение a_x = 1 м/с^2 (так как $a_x/2$ = 0,5 – это стоит перед t^2). Значит, скорость тела меняется по закону $v_x = -2 + t$ (см. формулу (6)). Графиком этой зависимости является прямая линия (я уже говорил в самом начале, что необходимо повторить простейшие функции и их графики – прямые, параболы и т.д.), для построения которой достаточно взять две точки, например, {t = 0, v_x = –2} и {t = 6, v_x = 4}. Так как ускорение в этой задаче от времени не зависит (оно всегда равно 1 м/с^2), то его графиком тоже является прямая линия, только параллельная оси t. Физически время отрицательным быть не может, значит рисовать прямые в область t < 0 смысла нет.





Задача №15.

На рисунке дан график изменения скорости тела, двигающегося по оси X. Построить график зависимости перемещения этого тела от времени. Найти перемещение тела за 2, 4, 6 с. Все величины измеряются в системе СИ.



Решение.

Как видно из рисунка характер движения тела меняется. На первом участке (OA) скорость тела линейно растёт, значит, тело движется равноускоренно. Причём, начальная скорость равна v_{0x} = 2 м/с, а ускорение можно определить из проекции формулы (6) на ось X: $v_x = v_{0x} \pm a_x t$ => $a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{4-2}{2} = 1 \text{м/с}^2$. Используя проекцию формулы (7) на ось X, можно написать выражение для перемещения:

$$S_1 = 2t + \frac{t^2}{2} \qquad (*)$$

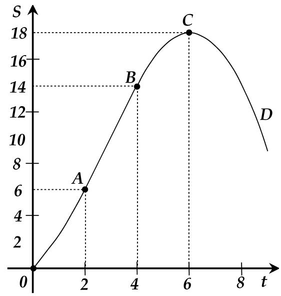
На втором участке (AB) скорость тела не меняется, то есть движение равномерное, a_x = 0, v_x = 4 м/с, а выражение для перемещения по формуле (7):

$$S_2 = 4t \qquad (**)$$

На третьем участке (BC) скорость тела линейно уменьшается, значит, движение опять равноускоренное, и аналогично первому участку находим v_{0x} = 4 м/с, $a_x = \frac{0-4}{2} = -2 \text{м/с}^2$. Здесь в качестве конечной скорости я взял скорость в точке C, хотя движение там не закончилось – тело продолжает двигаться, время же, в течение которого тело уменьшало скорость до нуля, как видно из рисунка равно 2 с. Следовательно, перемещение на третьем участке описывается формулой:

$$S_3 = 4t - t^2 \qquad (***)$$

При построении графика перемещения не забывай о некоторых тонкостях. Согласно полученному выражению (*) S_1 квадратично зависит от времени. В таком случае графиком будет парабола (*0A*), причём ветви её направлены вверх, и занимает она место по времени только от 0 до 2 секунд, а результирующее перемещение будет равно 6 метрам (надо подставить время 2 с в (*)).



Дальше идёт прямая линия (AB), согласно закону (**), причём, начинается она, естественно, с того места, где закончилась предыдущая кривая, а заканчивается точкой t = 4 с, S = 14 м. *Смотри внимательно: второй участок длится 2 с, если это время подставить в (**), то получим S_2 = 8 м, но к этим 8 метрам надо добавить уже пройденные на первом участке 6 метров. Так и получается 14 метров.*

Наконец, графиком третьего участка снова будет парабола (*BCD*) (S_3 зависит от квадрата времени), но теперь её ветви направлены вниз, так как перед t^2 стоит знак (–). И ещё здесь *необходимо учесть один момент*. В точке *C*, согласно данному в задаче рисунку, скорость становится равной нулю, а затем отрицательной. Физически это означает, что 6 секунд тело двигалось по направлению оси X, а дальше развернулось и начало движение против оси X. Следовательно, математически точка *C* является вершиной параболы – дальше перемещение уменьшается! Значение перемещения можно найти, подставив время t = 2 секундам в (***) и прибавив к полученному значению предыдущие 14 метров. В итоге получается 18 метров.

Хочу остановиться на одном **очень важном моменте**, который может помочь тебе **быстро решать** некоторые задачи. Дело в том, что формулой (7) можно пользоваться только при **равноускоренном** (или равномерном) движении. А что делать, если движение с **переменным ускорением**? Тогда надо пользоваться более общей формулой: $\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}\,dt$, или в проекции на ось X: $S_x = \int_{t_1}^{t_2} v_x\,dt$. Не пугайся, это **всего лишь интеграл**. Тебе не нужно запоминать этот закон (это надо будет делать в институте) и пользоваться им также пока не стоит (если, конечно, ты не решаешь задачи с интегралами с утра до вечера). Но один факт надо обязательно знать. Графическим смыслом такого интеграла является площадь фигуры, ограниченной графиком зависимости скорости v_x от времени t и осью OX – как раз такого графика, который и дан в условии задачи (график для векторной величины построен быть не может, поэтому, имеет смысл говорить только о проекциях). Иными словами, **площадь фигуры, ограниченной графиком зависимости v_x от t – это и есть перемещение тела по оси X!** Причём, с учетом знака v_x. То есть, если проекция скорости v_x **отрицательна**, то и **перемещение надо брать отрицательным**! И всё это **верно независимо от характера движения**.

Давай проверим это на нашей задаче. На первом участке под графиком получается трапеция. Площадь трапеции $S = \frac{a+b}{2}h$, где в нашем случае a = 4 м/с, b = 2 м/с, h = 2 с. Значит, S_1 = 6 м. На втором участке фигурой будет прямоугольник, следовательно $S_2 = a \times h = 4 \times 2 = 8$ м (а с учётом S_1 – 14 м). Наконец, третий участок даёт треугольник, площадь которого $S_3 = \dfrac{a \times h}{2} = 4$ м (общее перемещение с учётом предыдущих участков будет 18 м). Сравни полученные ответы с теми, которые были найдены по формуле (7)!

Мне кажется, вторым способом, то есть через площадь, намного быстрее. Кстати, данный аспект мы не раз ещё подметим в курсе физики и желательно его сразу запомнить.

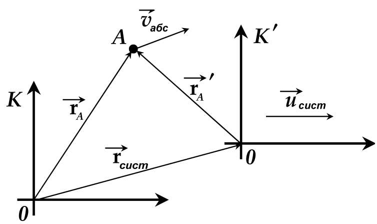
*****

Заметь, при решении задач я почти всегда рисую или подразумеваю систему отсчёта. Она всегда *была одна* в задаче и *неподвижна*. Для подавляющего большинства задач этого достаточно. Но существует небольшой класс задач, где *является целесообразным выбрать либо подвижную систему отсчёта*, то есть имеющую постоянную скорость относительно какой-либо другой системы, либо даже *рассматривать движение относительно двух систем отсчёта*. При этом будут выполняться некоторые новые законы.

Пусть система K' будет двигаться относительно системы K с постоянной скоростью $\vec{u}_{сист}$, а её положение в некоторый момент времени задаётся радиус-вектором $\vec{r}_{сист}$. Тогда положение некоторой точки А может быть задано в системе К радиус-вектором $\vec{r}_A$, а в системе K' – радиус-вектором $\vec{r}\,'_A$, причём:

$$\boxed{\vec{r}_A = \vec{r}\,'_A + \vec{r}_{сист}} \qquad (9)$$

Так, например, если ты сидишь в автобусе (свяжем систему K' с передним краем автобуса) на расстоянии 3-х метров от переднего края автобуса ($\vec{r}\,'_A$), а сам автобус ещё не доехал до остановки (свяжем систему K с остановкой) 15 метров ($\vec{r}_{сист}$), то ты находишься ($\vec{r}_A$) на расстоянии 18 метров от остановки (в данном случае вектора $\vec{r}\,'_A$ и $\vec{r}_{сист}$ направлены в одну сторону). Если автобус уже отъехал от остановки на 15 метров, то твоё положение – 12 метров относительно остановки (так как вектора $\vec{r}\,'_A$ и $\vec{r}_{сист}$ противонаправлены).



Если точка A имеет некоторую скорость $\vec{v}_{абс}$ относительно системы K (иногда говорят: **абсолютную скорость**), то она будет иметь и скорость $\vec{v}_{отн}$ относительно системы K' (говорят: **относительную скорость**), причём эти скорости связаны между собой:

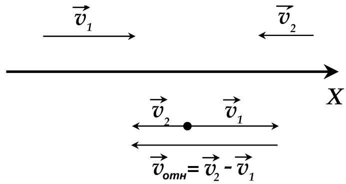
$$\boxed{\vec{v}_{абс} = \vec{v}_{отн} + \vec{u}_{сист}} \qquad (10)$$

Опять же, например, если автобус едет со скоростью 40 км/ч ($\vec{u}_{сист}$), а ты идешь в автобусе в сторону водителя со скоростью относительно пола 3 км/ч ($\vec{v}_{отн}$), то относительно Земли ($\vec{v}_{абс}$) твоя скорость будет 43 км/ч (скорости $\vec{u}_{сист}$ и $\vec{v}_{отн}$ сонаправлены). Если же ты идёшь в сторону от водителя, то твоя скорость $\vec{v}_{абс}$ будет 37 км/ч (скорости $\vec{u}_{сист}$ и $\vec{v}_{отн}$ противонаправлены).

Формулы (9) и (10) называются **преобразованиями Галилея**.

Задача №16.

В качестве первого примера рассмотрим ещё одно **решение задачи №2**.



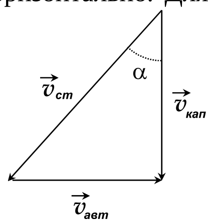
Если ласточку принять за подвижную систему отсчёта K', то скорость стрекозы относительно Земли (то есть абсолютная скорость) может быть представлена: $\vec{v}_2=\vec{v}_{отн}+\vec{v}_1$, где $\vec{v}_1$ – это скорость системы K' (это же скорость ласточки), а $\vec{v}_{отн}$ – скорость стрекозы относительно ласточки. Значит, $\vec{v}_{отн}=\vec{v}_2-\vec{v}_1$. На рисунке показан результирующий вектор $\vec{v}_{отн}$, причём, из того же рисунка следует, что по модулю этот вектор равен $v_{отн}=v_2+v_1=7$ м/с. Иными словами, стрекоза приближается к ласточке со скоростью 7 м/с! Так как начальное расстояние между ними было L = 28 метров, то бедная стрекоза долетит до ласточки за $t=\frac{L}{v_{отн}}=4$ секунды. Относительно же земли за это время ласточка пролетит расстояние $S=v_1t=20$ метров.

Задача №17.

В безветренную погоду на боковом стекле автобуса, едущего горизонтально со скоростью $v_{авт}$ = 31,2 км/ч, капли дождя оставляют след под углом α = 60⁰ к вертикали. Определить скорость падения капель $v_{кап}$.

Решение.

В безветренную погоду капли относительно земли (неподвижная система отсчёта) падают вертикально. Если мы представим себя едущими в автобусе (то есть мысленно перейдём в подвижную систему отсчёта), то мы будем видеть капель падающих под углом. Значит, их скорость $\vec{v}_{ст}$ относительно подвижной системы направлена под углом α. Сама же система (автобус) движется горизонтально. Для трёх скоростей – абсолютной скорости капель $\vec{v}_{кап}$, относительной скорости капель $\vec{v}_{ст}$ и скорости подвижной системы $\vec{v}_{авт}$ – должно выполняться соотношение (10): $\vec{v}_{кап}=\vec{v}_{ст}+\vec{v}_{авт}$. Сделаем согласно этому закону рисунок (рисунок однозначный – другого быть не может!) Получается прямоугольный треугольник, из которого можно определить $v_{кап}=\frac{v_{авт}}{\operatorname{tg}(\alpha)}=v_{авт}\operatorname{ctg}(\alpha)\approx 18$ км/ч

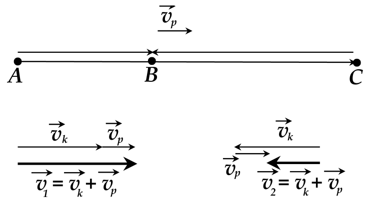


Задача №18.

Из катера, двигающегося вниз по реке, случайно выпал спасательный круг. Через τ = 10 минут пропажу заметили, катер развернули и нашли круг на расстоянии

L = 1 км от места падения. Определить скорость течения реки, если скорость катера относительно воды постоянна.

Решение.



Попробуем решить эту задачу в системе отсчёта, связанной с землёй. Для этого сделаем рисунок. Пусть точка A – место потери круга, C – место разворота катера, B – место обнаружения круга. Обозначим скорость течения реки $\vec{v}_p$, скорость катера относительно воды $\vec{v}_k$. Тогда абсолютная скорость катера (то есть его скорость относительно неподвижной системы – земли) может быть найдена с помощью закона (10). Для этого покажем эти скорости на рисунке и векторно сложим. В итоге (см. рисунок) абсолютная скорость катера при движении вниз по модулю будет равна $v_1 = v_k + v_p$, а при движении обратно $v_2 = v_k - v_p$. Расстояние AC катер прошел за время τ, значит $AC = v_1\tau = (v_k + v_p)\tau$. Пусть обратно он двигался некоторое время t. Тогда $BC = v_2 t = (v_k - v_p)t$. Спасательный круг будет двигаться со скоростью течения реки и за всё время по условию пройдёт расстояние $L = AB = v_p(\tau + t)$. Кроме того, из рисунка видно, что $AC = AB + BC = L + BC$. У нас получилась система из четырёх уравнений, в которых, правда, пять неизвестных. Но если её начать решать, то выяснится, что можно найти время t (я предлагаю тебе это сделать самому – просто подставь выражения для перемещений на разных участках в последнюю формулу и раскрой скобки). В результате ты получишь время t = 10 минут, после чего можно найти из третьего уравнения скорость течения реки $v_p = \dfrac{L}{\tau + t} = 3\,\text{км/ч}$. Правда, ничего больше из этой системы найти нельзя – всё-таки *неизвестных больше, чем уравнений*!

Достаточно долгое решение. А теперь попробуем решить эту задачу по другому. Давай перейдём в систему отсчёта, связанную со спасательным кругом (как будто мы сами находимся внутри этого круга). Что мы будем видеть? Мы будем видеть, *как мимо нас бегут берега, как катер уезжает от нас, а затем возвращается к нам*. Но ведь относительно нас (и воды) *катер едет с постоянной скоростью* (по условию). Значит, если он **уезжал от нас 10 минут**, то и **возвращаться к нам он будет тоже 10 минут!** Это аналогично тому, как ты ходишь, например, в магазин – дорога туда и обратно занимает одинаковое время. При этом ты же не думаешь, что **относительно звёзд**, учитывая *движение Земли*, твоя скорость при ходьбе в магазин будет **отличаться** от скорости при ходьбе обратно! И, что за время твоего похода, ты перемещаешься **относительно звёзд** на какое-то расстояние, как в задаче круг относительно земли проплывает L = 1 км!

Окончательный ответ, естественно, получается таким же. Но как видишь, это решение намного быстрее и красивее!

Задачи для самостоятельного решения.

1. Первую половину времени тело движется со скоростью 3 м/с под углом 60° к некоторому направлению, а вторую половину времени со скоростью 5 м/с под углом 120° к этому же направлению. Найти среднюю скорость движения и среднюю скорость перемещения тела.
2. Заяц, пробежав по прямой некоторое расстояние со скоростью v_1 = 7 м/с, резко повернул на 30° и вновь по прямой пробежал такое же расстояние, но со скоростью v_2 = 10 м/с. Найти перемещение и путь зайца, а также его среднюю путевую скорость, если на всё он затратил τ = 17 секунд.
3. Первую половину всего своего пути велосипедист проехал со скоростью в 3 раза большей, чем вторую. Найти эту скорость, если средняя скорость велосипедиста оказалась равной 10 км/ч.
4. Из Города в Деревню выехал автобус со средней скоростью v_1 = 50 км/ч. Через время τ = 1 час за ним выехала маршрутка со средней скоростью v_2 = 60 км/ч. На каком расстоянии от Города и через какое время маршрутка нагонит автобус?
5. Эскалатор метро поднимает стоящего на нем пассажира за время t_1 = 3 минуты, а идущего по нему вверх с постоянной скоростью – за время t_2 = 2 минуты. За какое время поднимется пассажир по неподвижному эскалатору?
6. Два поезда идут навстречу друг другу по параллельным путям со скоростями v_1 = 72 км/ч и v_2 = 54 км/ч соответственно. Определить время, за которое мимо пассажира, находящегося в первом поезде, проедет второй поезд, длина которого L = 175 м.
7. При скорости ветра 5 м/с капли дождя падают под углом 35° к вертикали. С какой скоростью они падают, когда ветер стихает? Считать, что ветер дует горизонтально.
8. Охотнику надо переплыть на лодке реку шириной 50 м, текущую со скоростью 3 км/ч. Под каким углом к береговой линии он должен направлять свою лодку, чтобы переплывать реку строго перпендикулярно берегу, если скорость лодки по воде 5 км/ч? За какое время охотник переплывёт реку?
9. Идущая вверх по течению реки моторная задела плывущее бревно. Через 10 минут лодку пришлось остановить и устранить течь, на что ушло также 10 минут. После этого лодку развернули и нагнали бревно на расстоянии одного километра от места удара. Найти скорость течения реки.
10. Спортсмены бегут колонной длины 40 метров со скоростью 3 м/с. Навстречу неспешно со скоростью 1 м/с идет тренер. Каждый спортсмен, поравнявшись с тренером, разворачивается и начинает бежать назад со скоростью 4 м/с. Какова будет длина колонны, когда все спортсмены развернутся.
11. По двум пересекающимся под прямым углом дорогам едут две машины, одна со скоростью v_1, другая – со скоростью v_2. В тот момент, когда первая находится на перекрёстке, вторая – на расстоянии L от него. Найти минимальное расстояние между машинами в процессе движения.
12. Одной из характеристик автомобиля является время его разгона с места до скорости 100 км/ч. Чему равно его ускорение и пройденный путь, если время разгона автомобиля 8 с.
13. Автомобиль начал торможение при скорости 72 км/ч. С каким ускорением он двигался и какое время, если до полной остановки он прошёл путь 20 м?
14. Точка движется с начальной скоростью 10 м/с и ускорением 5 м/с^2, направлен-

ным против скорости. Определить перемещение и путь за 5 секунд движения.

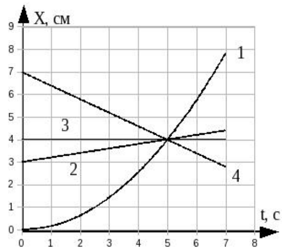
15. Тело начинает двигаться из некоторой точки А равноускоренно. Спустя 4 секунды вектор ускорения меняет своё направление на противоположное. Через какое время тело вернется в точку А?

16. За третью секунду равноускоренного движения тело прошло путь в 2 раза бóльший, чем за первую секунду. Во сколько раз больший путь пройдет это тело за пятую секунду, чем за первую?

17. Мяч бросили с балкона вертикально вверх со скоростью v_0 = 20 м/с. Найти скорость, перемещение и пройденный путь к моментам времени t_1 = 1 с и t_2 = 5 с.

18. Камень бросили с некоторой высоты горизонтально. Через t = 2 секунды его скорость оказалась направлена вниз под углом α = 55° к горизонту. Определить начальную скорость камня.

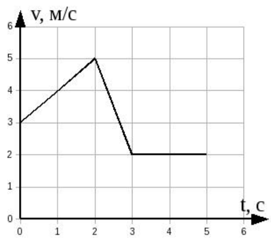
19. Охотник стреляет из ружья, располагая его под углом α = 30° к горизонту вверх. Начальная скорость пули v_0 = 100 м/с. Найти на какую высоту поднимется пуля, а также дальность и время её полёта. Как изменятся ответы, если охотник стреляет с высоты 55 м над поверхностью земли?



20. Начальная скорость брошенного камня равна 10 м/с, а спустя время 0,5 секунды его скорость стала равной 7 м/с. На какую высоту поднимется камень?

21. Мяч отпускают над наклонной плоскостью, расположенной под углом 30° к горизонту. Расстояние между двумя последовательными ударами мяча о плоскость 3 метра. С какой высоты относительно точки первого удара отпустили мяч? Удар о плоскость считать абсолютно упругим.

22. На верхнем рисунке представлен график зависимости координат нескольких тел от времени. Определите скорости тел в момент времени 5 секунд (для 1-го тела принять начальную скорость равной нулю).



23. На рисунке приведена зависимость скорости тела от времени при прямолинейном движении. Найти ускорения тела на различных участках, а также пройденный за 4 секунды путь.

Ответы.

1. $v_{ср}^{L}=4$ м/с ; $\left|\vec{v}_{ср}^{S}\right|\approx 2{,}2$ м/с
2. $S \approx 135$ м; $L = 140$ м; $v \approx 8{,}2$ м/с
3. 20 км/ч
4. на расстоянии 300 км через 5 часов
5. 6 минут
6. 5 секунд (не забудь скорости перевести в м/с)
7. ≈ 7,14 м/с
8. 53° против течения реки; за 45 секунд
9. 2 км/ч
10. 30 м (лучше перейти в систему отсчета, связанную с тренером, и рассматривать перемещение последнего и первого спортсменов)
11. $S_{min}=\frac{L\,v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$ (если перейти в систему отсчета, связанную с одной из машин, то вторая будет проезжать мимо первой по прямой линии. Остается найти кратчайшее расстояние между первой машиной и этой линией – то есть, длину перпендикуляра, опущенного на эту линию из точки нахождения первой машины. Пространственный треугольник расстояний будет подобен треугольнику скоростей.)
12. 3,47 м/с^2; 111 м (опять же не забудь перевести скорость в м/с)
13. –10 м/с^2 (так как тормозит); 2 секунды
14. S = –12,5 м (знак (–) показывает, что перемещение направлено против начальной скорости; L = 32,5 м
15. примерно через 13,7 секунд после старта (по условию начальная скорость равна нулю)
16. в 3 раза (учти, в этой задаче у тела есть какая-то начальная скорость)
17. 1) v = 10 м/с; S = 15 м; L = 15 м; 2) v = –30 м/с; S = –25 м; L = 65 м (знак минус перед скоростью и перемещением означает, что они направлены вниз)
18. 14 м/с
19. 1) H = 125 м; L = 866 м; t = 10 с; 2) H = 180 м; L = 953 м; t = 11 с
20. ≈ 2,9 м (учти, что в условии не сказано, как бросают камень)
21. 0,8 м (при абсолютно упругом ударе скорость после удара равна скорости до удара, и угол, который вектор скорости до и после удара составляет с плоскостью, также одинаков)
22. 1) 1,6 см/с; 2) 0,2 см/с; 3) 0; 4) –0,6 см/с
23. 1 м/с^2 от 0 до 2 с; –3 м/с^2 от 2 до 3 с; 0 от 3 до 5 с; S = 13,5 м

Убедительная просьба: присылать Ваши отзывы (пожелания, замечания, просьбы и т.п. – маты не надо!) на электронную почту.